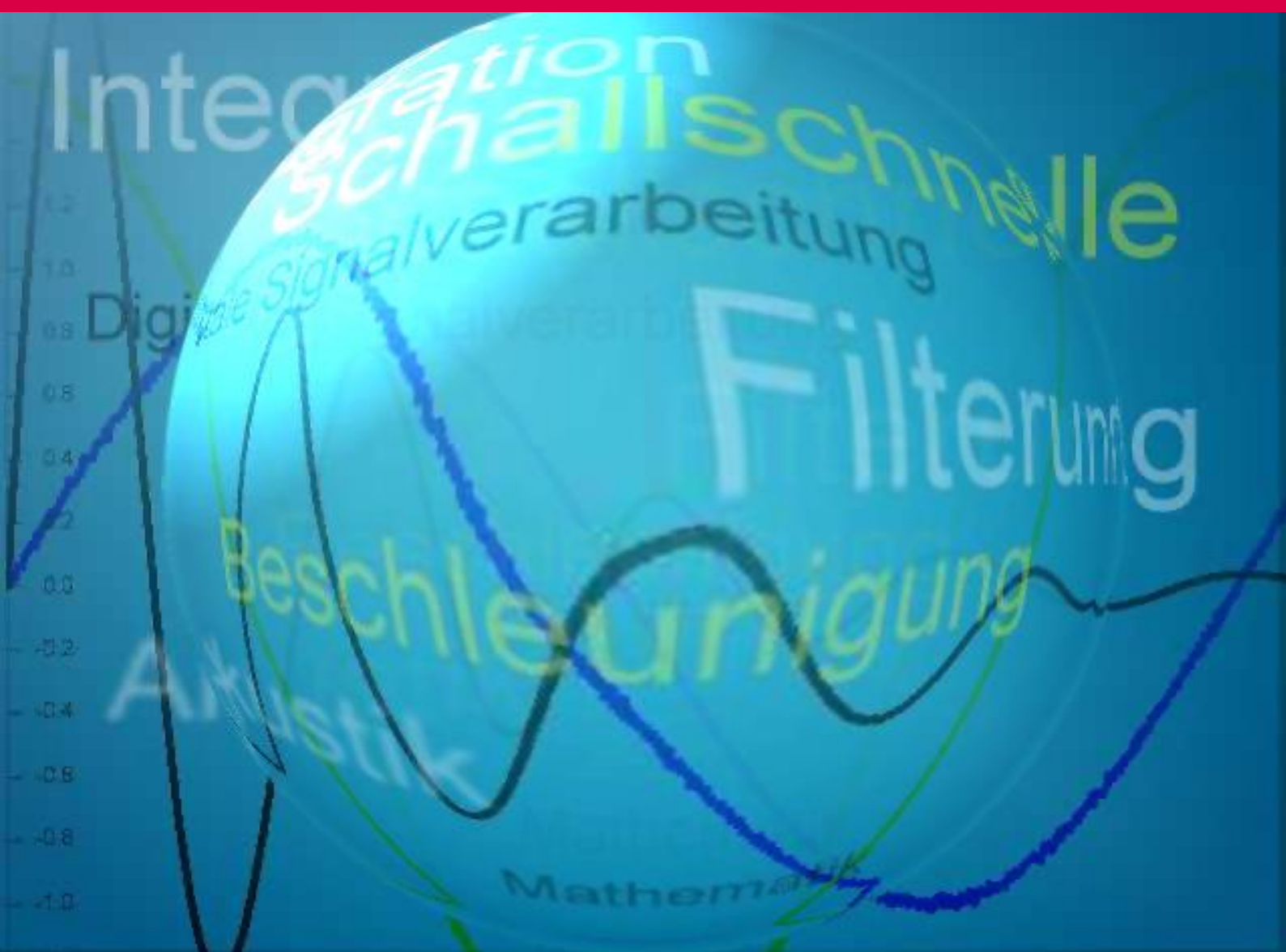


Digitale Integration für den Praktiker

White Paper



Hilfe ...

„ ... mein digitaler Integrator integriert nicht, sondern liefert ein nicht verständliches ansteigendes oder abfallendes Signal“.

Diesen oder ähnliche Hilferufe hört man oft, wenn es um digitale Integration in der digitalen Signalverarbeitung geht.

In der physikalischen Messtechnik steht der Messtechniker oft vor der Aufgabe aus einem physikalischen Sensorsignal mit Hilfe eines Integrators ein abgeleitetes Signal zu berechnen.

Der Akustiker misst Vibrationssignale mit Hilfe von Beschleunigungsaufnehmern, weil es schön einfach ist. Die interessierende Messgröße ist aber oft die Schallschnelle v , die mit Hilfe einer Integration aus dem Beschleunigungssignal abgerechnet wird.

$$v(t) = \int a(\tau) d\tau$$

Der Akustiker hat ein besonderes Interesse an der Schallschnelle v , weil diese Größe neben dem Schalldruck eine der beschreibenden Feldgrößen der Akustik ist. Der Vollständigkeit halber sei angemerkt, dass es auch direkte Messmethoden für die Schallschnelle gibt, das diese Messmethoden aber oft aufwendiger sind als die Messung mit einem Beschleunigungsaufnehmer.

Theoretische Betrachtung

Die Integration eines Signals ist eine einfache lineare Operation der Mathematik. Die Realisierung auf Digitalrechnern oder intelligenten Messsystemen erfolgt durch Annäherungsformeln, wie der Rechteck- oder der Trapezregel (nähere Erläuterungen finden Sie z.B. in [1])

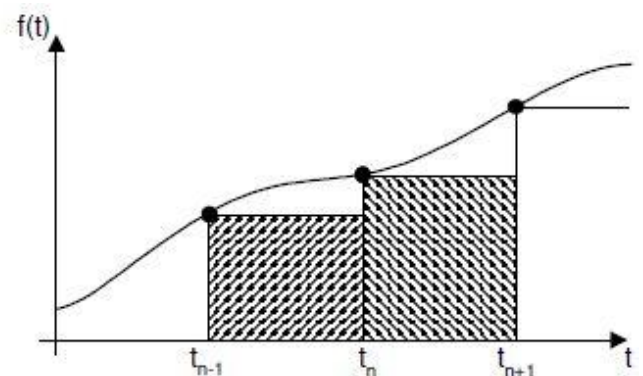


Bild 1: Flächenapproximation mit Hilfe der Rechteckregel

Der Integrator berechnet die Fläche unterhalb der Kurve. Dies wird in der Regel durch die Annäherung mit Hilfe von Riemanschen Summen erreicht. Der einfachste Weg zur Implementierung eines digitalen Integrators ist der Integrator mit der Rechteckregel. Eine weitere einfache Möglichkeit stellt die Trapezregel da.

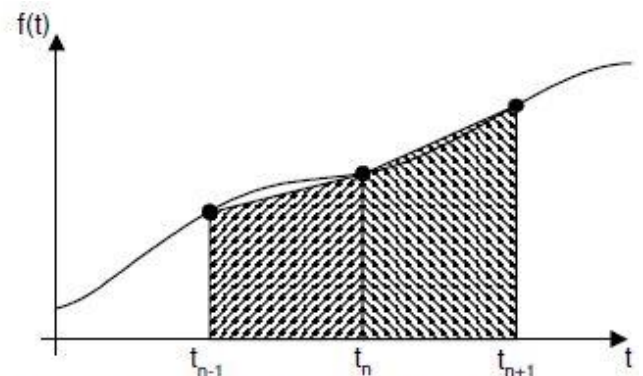


Bild 2: Flächenapproximation mit Hilfe der Trapezregel

In digitalen Systemen ist die Genauigkeit der Flächenberechnung unterhalb der Kurve, entsprechend den Riemanschen Summen, abhän-

gig von der Abtastfrequenz. Je höher die Abtastfrequenz desto besser die Approximation.

Praktische Betrachtung

Bei der praktischen Betrachtung der Integration ergeben sich Randbedingungen, die einer besonderen Behandlung bedürfen.

Die messtechnische Verarbeitung von Sensor-signalen ist immer offsetbehaftet, deshalb ist es wichtig das Verhalten des Integrators bei offsetbehafteten Signalen zu untersuchen.

Als einfachstes Modell eine solchen Signals sein

folgender Verlauf angenommen:

$$u(t) = u_0 + \sin(\omega t)$$

In Vernachlässigung der Allgemeingültigkeit wird in dem Beispiel ein zeitlich konstantes Offset u_0 angenommen, was ein typischer Fall für die messtechnische Erfassung von Sensor-signalen ist. Wenn dieses Signal integriert wird, ergibt sich folgender theoretischer Funktionsverlauf bei vernachlässigten Anfangswerten.

$$\begin{aligned} y(t) &= \int u(\tau) d\tau \\ &= \int u_0 + \sin(\omega\tau) d\tau \\ &= u_0 * t - \frac{1}{\omega} \cos(\omega t) \end{aligned}$$

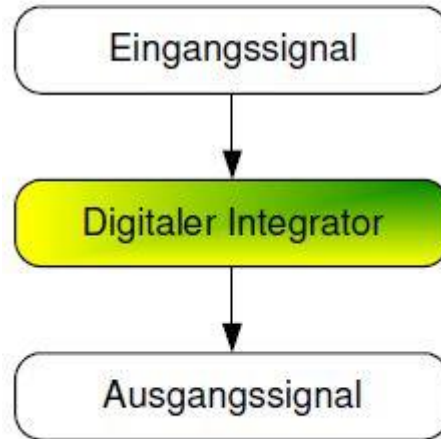


Bild 3: Strukturbild des digitalen Integrators

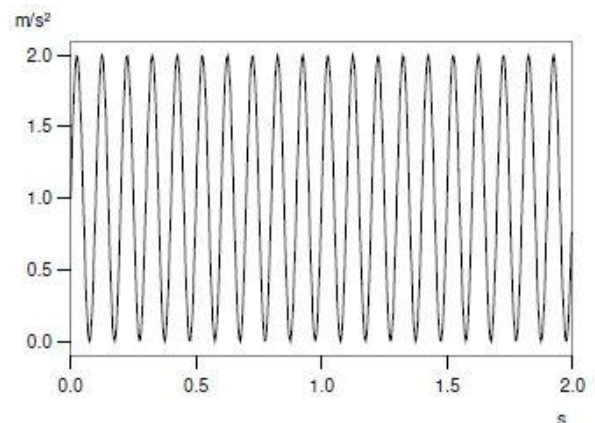


Bild 4: Mit Offset behaftetes Beschleunigungssignal

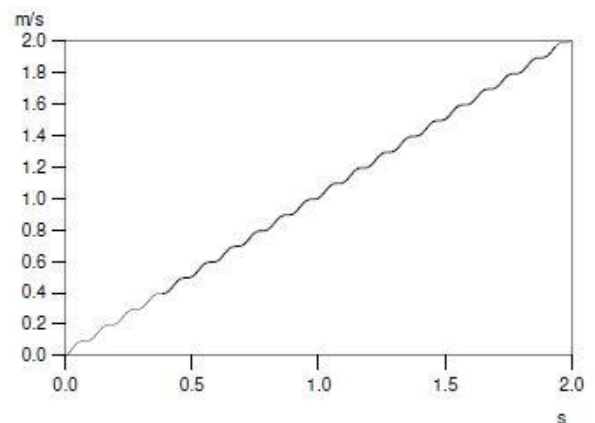


Bild 5: Integrationsergebnis des oben beschriebenen Signals

Der zweite Teil der vorausgegangenen Gleichung beschreibt das Nutzsignal, der erste Teil stellt den nicht gewünschten Anteil da, der aus der Messdatenaufnahme resultiert.

Anhand der spektralen Verteilung der Signale ansieht, erkennt der Praktiker sofort eine Lösungsmöglichkeit für die fehlerhafte Integration.

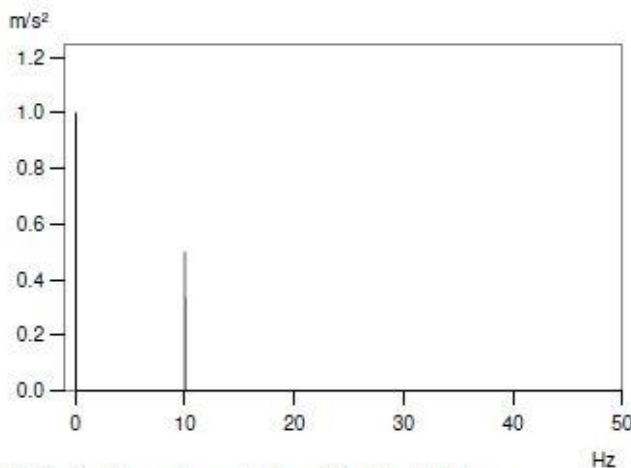


Bild 6: Spektrum des mit dem Offset behafteten Beschleunigungssignals

Die Spektrallinie bei $f = 0$ stellt den Offset da. Die Spektrallinie bei $f = 10$ Hz entspricht dem Nutzsignal.

Die Lösung des Problems „weglaufender“ Integrator kann mit Hilfe einer spektralen Begrenzung des Signals erfolgen. Dazu wird das Beschleunigungssignal vor der Integration mit einem Hochpassfilter gefiltert, so dass alle Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz unterdrückt werden.

Eine weitere Erklärungsmöglichkeit ist die Interpretation der physikalischen Messergebnisse. Ein konstanter Wert der Beschleunigung bei der Frequenz Null entspricht einem kontinuierlichen Anstieg der Geschwindigkeit und einem quadratischen Anstieg des Wegs. Dies bedeutet eine kontinuierliche Bewegung innerhalb des Bezugssystems, d. h. der Messpunkt bewegt sich kontinuierlich weg vom Ursprung des Bezugssystems. Da diese Aufgabenstellung in der Regel nicht ge-

stellt wird, können die Frequenzanteile für kleine Frequenzen ausgeblendet werden. Dies kann mit Hilfe eines Hochpassfilters durchgeführt werden. Neben dem konstanten Offset können auch zeitinvariante Offsets bei tiefen Frequenzen über das Hochpassfilter kompensiert werden. Die Bandbegrenzung sollte dabei mit einem Filter

geringer Ordnung durchgeführt werden, da ansonsten die Phasenfrequenzgänge des Gesamtsystems stark von der Ausgangsübertragungsfunktion abweichen.

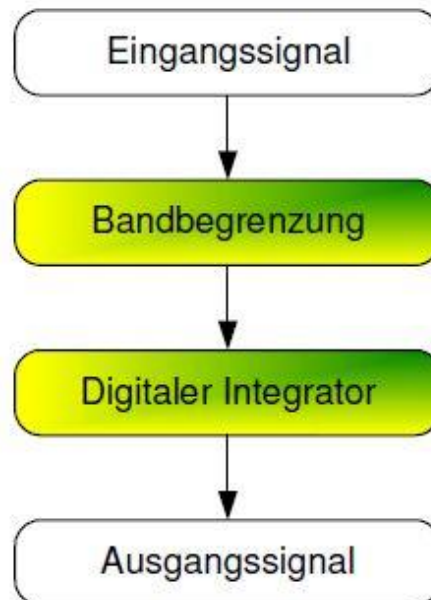


Bild 7: Strukturdiagramm des bandbegrenzten digitalen Integrators

Mit Hilfe der Bandbegrenzung sieht das gefilterte Eingangssignal folgendermaßen aus.

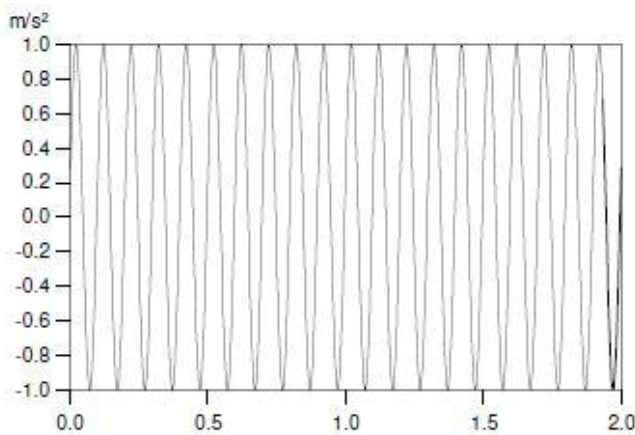


Bild 8: Bandbegrenztes Beschleunigungssignal

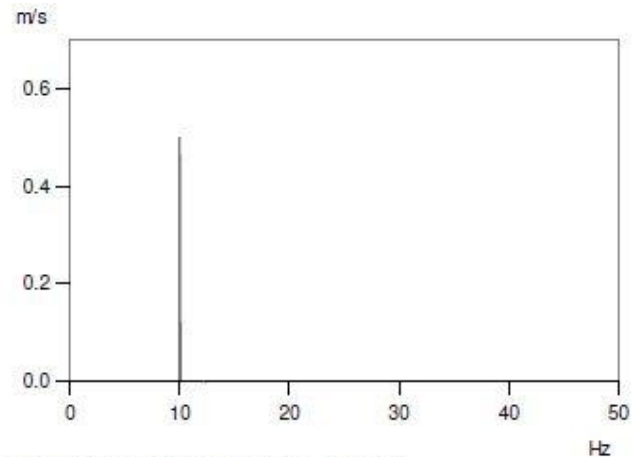


Bild 10: Spektrum des bandbegrenzten Beschleunigungssignals

Die Bandbegrenzung führt dazu, dass der Gleichanteil des Signals verschwindet, so dass bei einer hohen Auflösung der Offset nahezu verschwindet. Dies führt bei kurzen Messzeiten, wie im angegebenen Beispiel zu folgendem Integrationsergebnis.

Der ansteigende Verlauf des Integrationsergebnisses (Schwinggeschwindigkeit), verursacht durch den auf integriertem Signaloffset, ist verschwunden. Das sinusförmige Eingangssignal wurde zu einem Cosinus förmigen Ausgangssignal mit negativen Vorzeichen verrechnet. Das Spektrum des Ausgangssignals ist im folgenden Diagramm wiedergegeben.

Für zeitlich kurze Signale kann das Problem damit als gelöst angesehen werden. Bei zeitlich länger andauernden Signalen, wie sie z. B. bei Dauerüberwachungen von Schwingungssignalen auftreten können, kann es aber weiterhin zu Problemen kommen. Dies hängt einerseits mit der endlichen Anzahl von Bits für die Zahlendarstellung (auch bei Darstellung der Zahlen im Floating Format) und andererseits mit dem Verhältnis der unteren Grenzfrequenz des Bandbegrenzungsfilters zur Abtastfrequenz des Signals zusammen. Beide Effekte führen dazu, dass der Offset zwar klein wird, aber nicht vollständig verschwindet. Bei Betrachtung des Spektrums des Signals sind bei kleinen Frequenzen um die 0 Hz nicht verschwindende Signalanteile erkennbar.

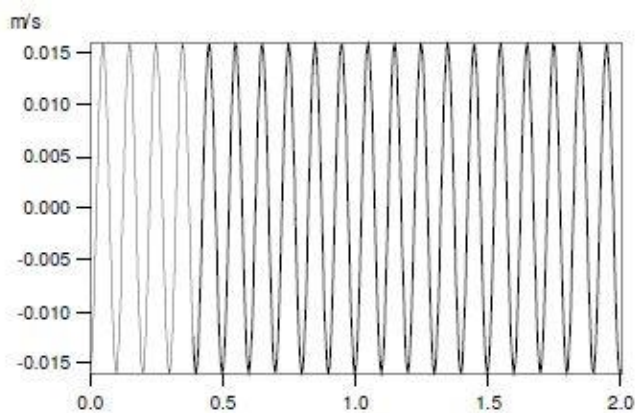


Bild 9: Integrationsergebnis des bandbegrenzten Beschleunigungssignals

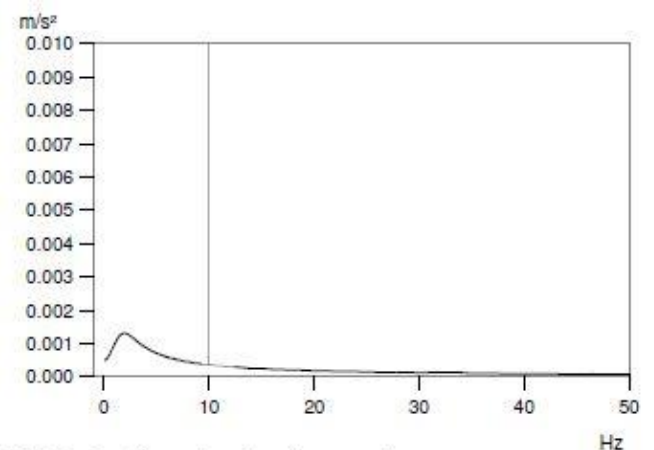


Bild 11: Spektrum des bandbegrenzten Beschleunigungssignals mit gezoomter Y-Achse

Werden nun Messungen über längere Zeiträume auf integriert, ergeben sich wiederum driftende Ausgangssignale. Die numerischen Probleme können sich am besten im Frequenzgang verdeutlicht werden.

Der kontinuierliche Integrator hat den Frequenzgang:

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

Der digitale Integrator nach der Rechteckregel hat die folgende Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} G_R(e^{j\Omega}) &= \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} \\ &= \frac{T}{2} \frac{1}{\sin(\frac{\Omega}{2})} e^{-\frac{\pi}{2} \frac{\Omega}{2}} \end{aligned}$$

Für den digitalen Integrator nach der Trapezregel ergibt sich:

$$\begin{aligned} G_T(e^{j\Omega}) &= \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} \\ &= \frac{T}{2} \frac{1}{\tan(\frac{\Omega}{2})} e^{-\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

In den folgenden Abbildungen werden die Amplituden- und Phasenfrequenzgänge der Integratoren darge-

stellt.

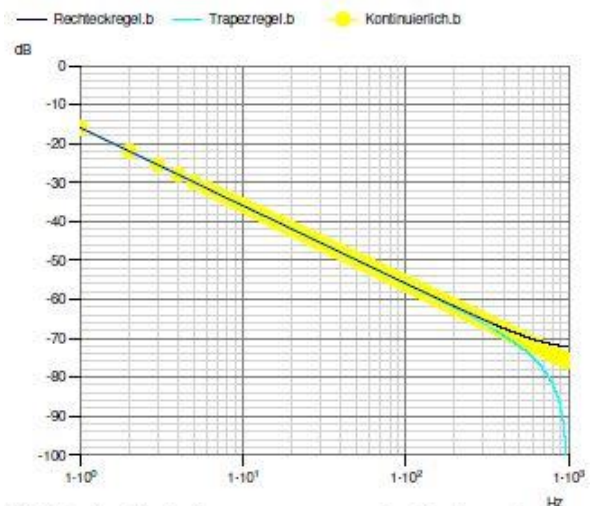


Bild 12: Amplitudenfrequenzgang von Rechteck- und Trapezintegrator

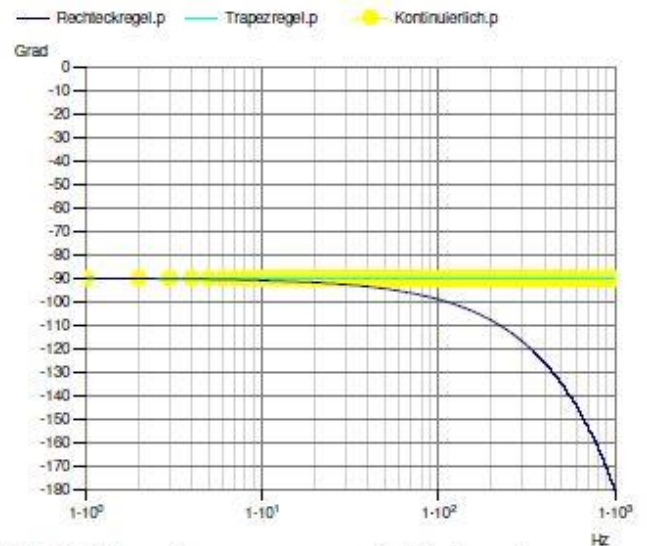


Bild 13: Phasenfrequenzgang von Rechteck- und Trapezintegrator

Allen Integratoren gemeinsam ist, dass sie für Frequenz 0 einen unendlich hohen Verstärkungsfaktor haben (der Nenner aller Übertragungsfunktionen strebt gegen 0 für $f=0$).

In diesem Bereich wollen wir aber gerade eine maximale Unterdrückung realisieren, weil ein eventueller Offset das Integrationsergebnis verfälschen würde.

Also müssen wir einen Integrator realisieren, der einerseits weiterhin eine maximale Unterdrückung für kleine Frequenzen besitzt und andererseits im interessierenden Frequenzbereich (Durchlass Bereich der Bandbegrenzung integratives Verhalten besitzt).

Der Gesamtfrequenzgang einer Reihenschaltung einer Bandbegrenzung mit Hilfe eines Bandpassfilters und einem Integrator ist im folgenden Bild wiedergegeben.

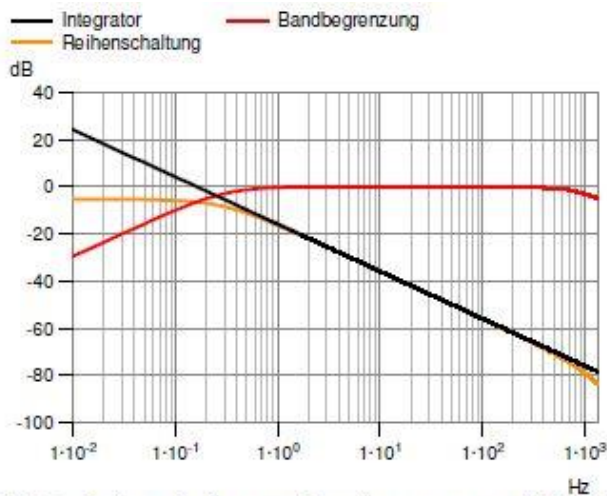


Bild 14: Reihenschaltung von Bandbegrenzung und Integrator im Frequenzgang

Wenn man sich die Integratoren im Betragsfrequenzgang etwas genauer ansieht, erkennt man, dass sie ein analoges Frequenzverhalten wie ein Tiefpassfilter erster Ordnung oberhalb der Grenzfrequenz haben.

Die Übertragungsfunktion eines Tiefpasses 1. Ordnung lautet:

$$G(j\omega) = \frac{\omega_0}{\omega_0 + j\omega}$$

Für Frequenzen oberhalb der Grenzfrequenz geht die Übertragungsfunktion des Tiefpasses 1. Ordnung in die Übertragungsfunktion des Integrators über.

Der Vorteil dieser Übertragungsfunktion ist, dass sie für Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz gegen den Wert 1 strebt und nicht gegen den Wert unendlich, wie der Integrator. Damit heben sich für $f=0$ die Verstärkung des Integrators und die Dämpfung der Bandbegrenzung nicht auf.

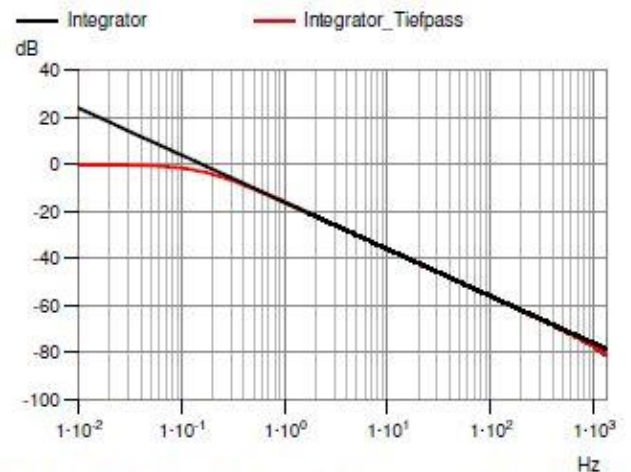


Bild 15: Betragsfrequenzgang Integrator und Tiefpassfilter mit angepaßter Grenzfrequenz

Die gute Adaption des Betragsfrequenzgangs des idealen Integrators ist deutlich zu erkennen. Wenn nun mit Hilfe des oben beschriebenen Tiefpassfilters die Kombination von Bandbegrenzung und Integrator aufgebaut wird, ergibt sich die folgende Übertragungsfunktion.

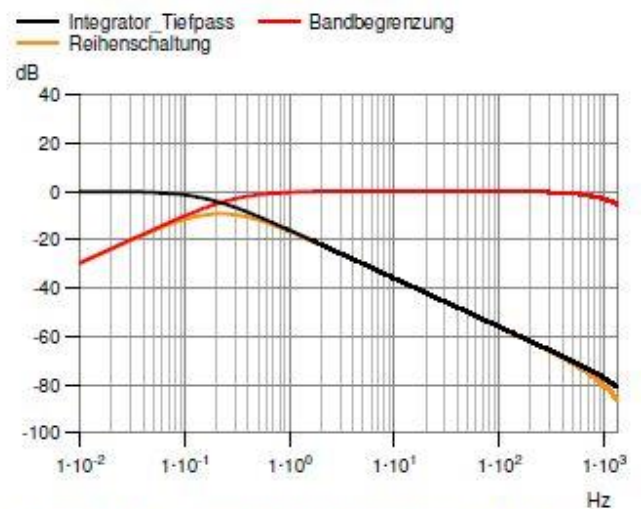


Bild 16: Reihenschaltung von Tiefpass-Integrator und Bandbegrenzung

Bei tiefen Frequenzen hat die oben beschriebene Kombination die volle Dämpfung der Bandbegrenzung und somit eine weitaus bessere Unterdrückung des Signaloffsets, der oben noch zur Verfälschung des Integrationsergebnisses geführt hat. Vergleicht man die Integration mit der Rechteck- oder Trapezregel mit der Integration über den Tiefpass erhält man näherungsweise die gleichen Band-

breiten für das integrative Verhalten, die dabei lediglich durch die Bandbegrenzung festgelegt wird. Dieser Effekt ist solange gültig, wie die untere Grenzfrequenz der Bandbegrenzung oberhalb der Grenzfrequenz des Tiefpassfilters liegt. Dies sollte aber immer der Fall sein, damit das Durchlassband des Bandpassfilters voll im integrativen Bereich liegt.

Phasenfrequenzgang – nicht zu vernachlässigen

Zum Abschluss betrachten wir noch kurz die Phasenfrequenzgänge der Reihenschaltungen des Integrators und der Bandbegrenzung. Der ideale Integrator hat einen frequenzunabhängigen Phasengang von konstant -90 Grad.

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= a \tan\left(\frac{\text{Im}\{G(j\omega)\}}{\text{Re}\{G(j\omega)\}}\right) \\ &= a \tan\left(\frac{-\omega}{0}\right) \\ &= -90 \text{ Grad} \end{aligned}$$

Der ideale Integrator und der Integrator auf Basis des Tiefpassfilters haben die im folgenden Bild dargestellte Phasenfrequenzgänge.

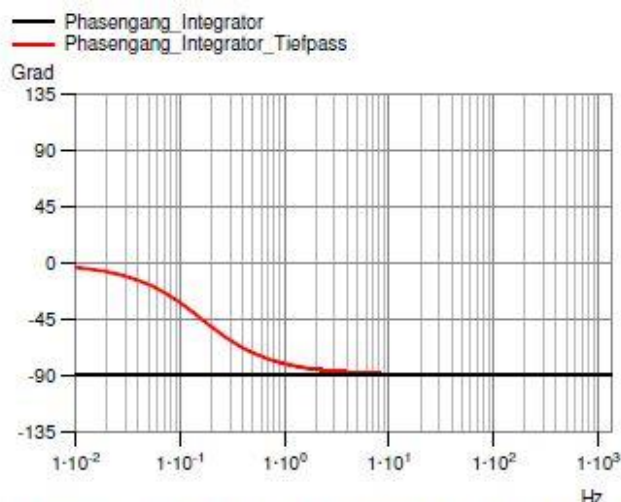


Bild 17: Phasengänge von idealem Integrator und Integrator auf Basis des Tiefpassfilters

Wenn wir nun die Phasenfrequenzgänge der Reihenschaltung zwischen idealem Integrator und Bandbegrenzung betrachten, erhalten wir

das folgende Bild. Der Verlauf des Phasenfrequenzgangs wird bis auf den konstanten Anteil des idealen Integrators durch das Bandpassfilter der Bandbegrenzung bestimmt.

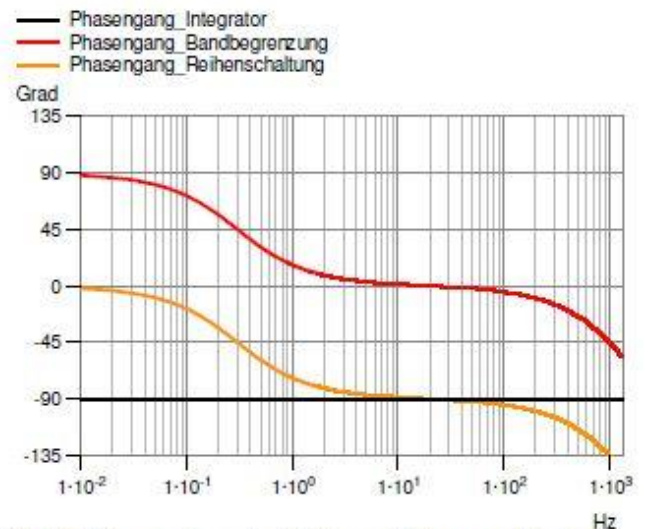


Bild 18: Phasengänge der Reihenschaltung von idealem Integrator und Bandbegrenzung sowie die Teilphasengänge

Bei der Reihenschaltung von Bandbegrenzung und Integrator auf Basis des Tiefpassfilters, ergeben sich bei tiefen Frequenzen unterhalb der Grenzfrequenz der Bandbegrenzung Abweichungen, da der Verlauf hier auch von dem Phasenfrequenzgang des Tiefpassfilters bestimmt wird.

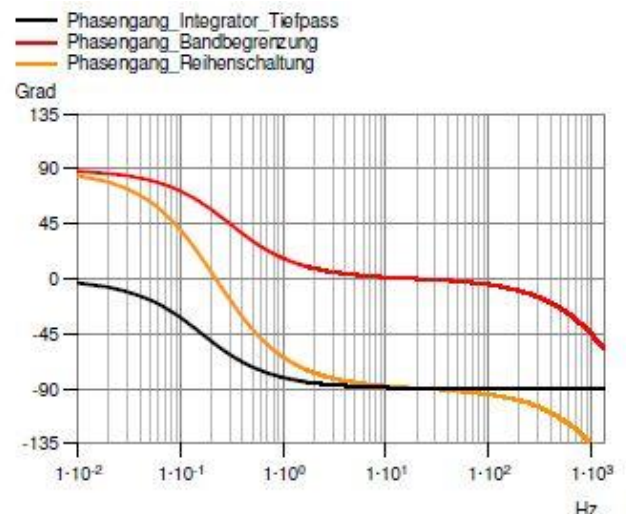


Bild 19: Phasengänge der Reihenschaltung des Integrators auf Basis des Tiefpassfilters und Bandbegrenzung sowie die Teilphasengänge

Diese Effekte im Phasenfrequenzgang können durch die Verschiebung der Grenzfrequenz des Tiefpassfilters bei gleichzeitiger Anpassung des Verstärkungsfaktors verbessert werden.

$$G(j\omega) = k \frac{\omega_1}{\omega_1 + j\omega}$$

Wenn für $k=10$ gewählt wird, ergibt sich $\omega_1 = 0.1 \cdot \omega_0$

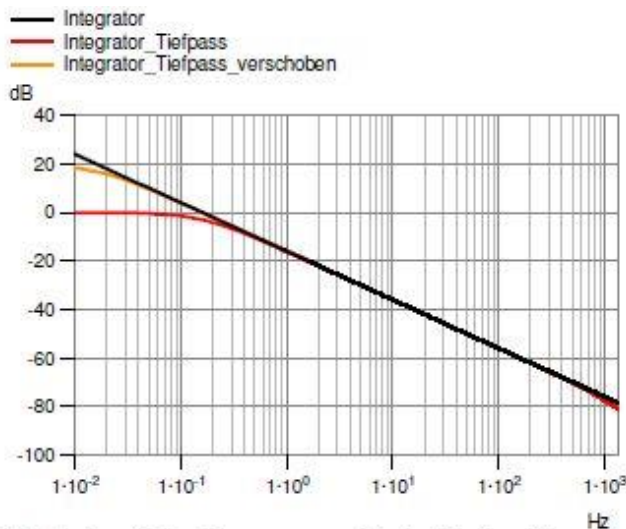


Bild 20: Amplitudenfrequenzgang für den idealen Integrator, den Integrator auf Basis eines Tiefpasses und den verschobenen Tiefpassintegrator

Für die Phasenfrequenzgänge ergibt sich durch die Verschiebung der Tiefpassgrenzfrequenz eine verbesserte Approximation des Phasenfrequenzgangs im Durchlassbereich.

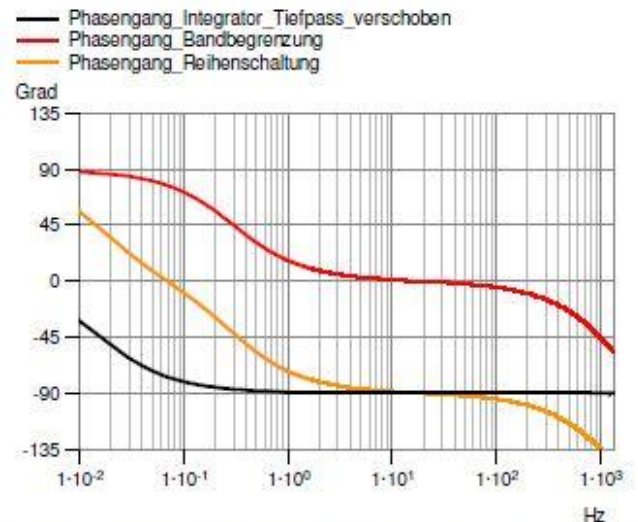


Bild 21: Phasenfrequenzgang des Integrators auf Basis eines Tiefpassfilters mit verschobener Grenzfrequenz und angepaßtem Verstärkungsfaktor

Es sollte aber auch nicht verschwiegen werden, dass die Verbesserung der Approximation des Phasenfrequenzgangs im Durchlassbereich mit einer verringerten Störsignalunterdrückung im Sperrbereich der Bandbegrenzung erkauft wurde. Dem Anwender obliegt es, den für seine Bedürfnisse optimalen Kompromiss zwischen den Zielgrößen zu bestimmen.

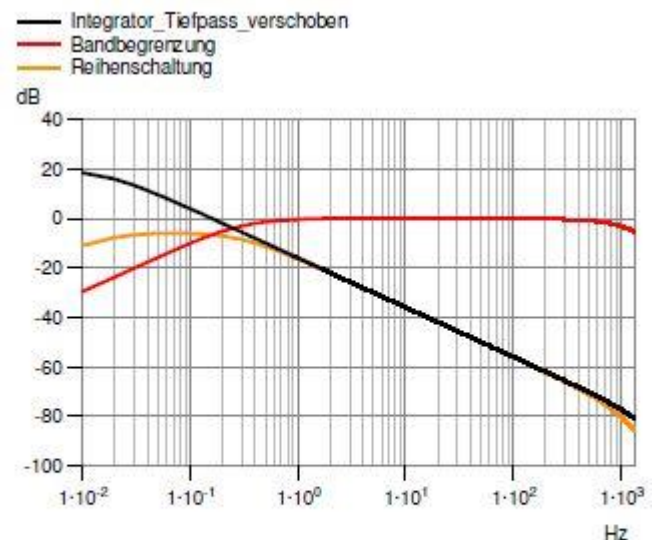


Bild 22: Amplitudenfrequenzgang Reihenschaltung aus Bandbegrenzung und Tiefpassfilter mit verschobener Grenzfrequenz

Doppelintegration – Berechnung Schwingweg aus der Schwingbeschleunigung

In der Praxis kommt es auch oft vor, dass der Schwingweg aus der Schwingbeschleunigung berechnet werden soll. Dies entspricht einer doppelten Integration der Beschleunigungsgröße.

$$s = \iint a(\tau) d\tau d\tau$$

Wird wieder das oben beschriebene Signal mit Offset betrachtet, so ergibt sich mit vernachlässigten Anfangswerten

$$\begin{aligned} s(t) &= \iint u(\tau) d\tau d\tau \\ &= \frac{1}{2} u_0 * t^2 - \frac{1}{\omega^2} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Der Stör Term, der durch den Offset hervorgerufen wird, steigt nun quadratisch mit der Zeit an.

Wenn wir nun eine Bandbegrenzung mit einem Filter 1. Ordnung (Hochpassfilter) vornehmen würden, würde dies nicht zum Erfolg führen. Da wir in der Reihenschaltung aus Bandbegrenzung und Integrator für tiefe Frequenzen keine Störunterdrückung realisieren könnten.

Aus der Abbildung unten erkennen wir deutlich, dass wir mit der gewählten Bandbegrenzung bei tiefen Frequenzen sogar eine Verstärkung der potentiellen Störsignale bewirken.

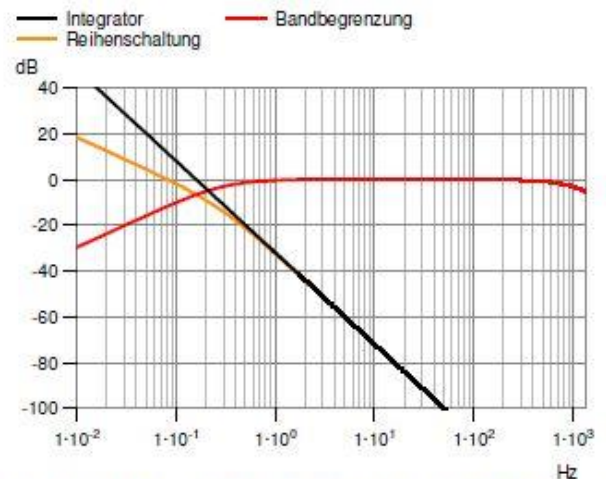


Bild 23: Amplitudenfrequenzgang der Reihenschaltung eines Doppelintegrators und der Bandbegrenzung

Abhilfe schafft hier, wie oben bei dem Einfachintegrator, ein Tiefpassfilter 2. Ordnung. Der Tiefpassfilter 2. Ordnung besitzt ebenso wie der Einfachintegrator auf Basis eines Tiefpassfilters bei tiefen Frequenzen eine Verstärkung von Eins.

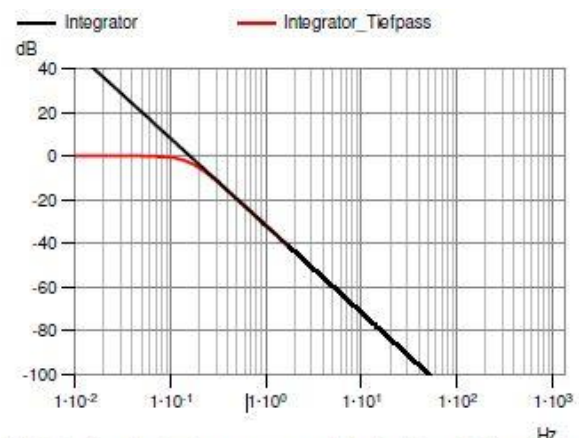


Bild 24: Amplitudenfrequenzgang idealer Doppelintegrator und Doppelintegrator auf Basis eines Tiefpassfilters

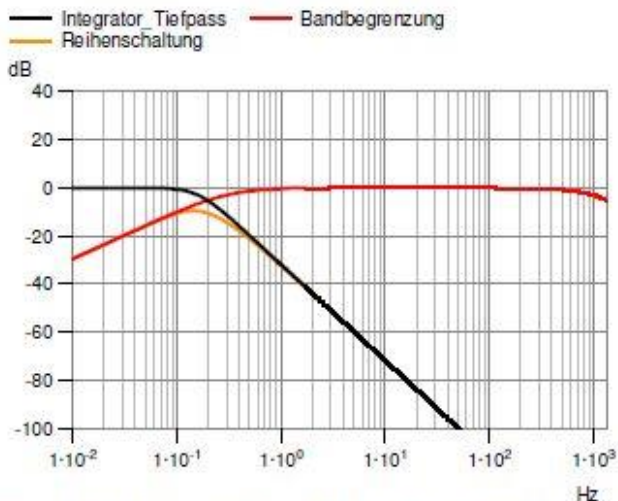


Bild 25: Amplitudenfrequenzgang der Reihenschaltung eines Doppelintegrators auf Basis eines Tiefpassfilters und der Bandbegrenzung

Auch hier ist wieder anzunehmen, dass die Frequenzen unterhalb einer Grenzfrequenz keinerlei physikalische Bedeutung besitzen und somit bei der Integration nicht berücksichtigt werden müssen.

Für den Phasenfrequenzgang ergeben sich entsprechende Verläufe, wobei der ideale Doppelintegrator einen Phasenfrequenzgang von -180 Grad hat.

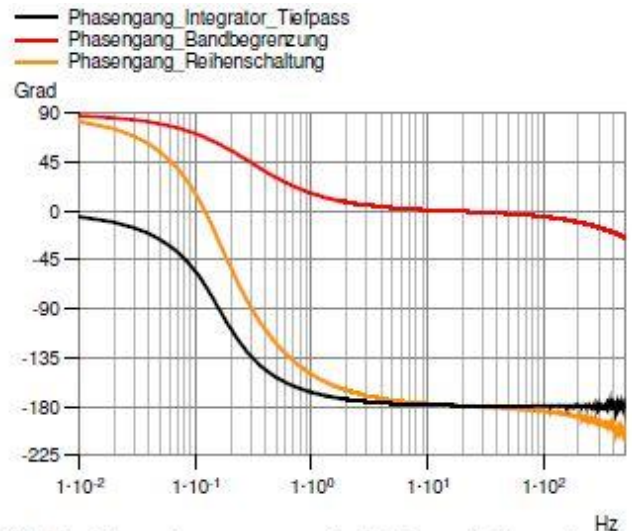


Bild 26: Phasenfrequenzgang der Reihenschaltung eines Doppelintegrators auf Basis eines Tiefpassfilters und der Bandbegrenzung

Die oben beschriebenen Effekte sollten bei der digitalen Integration von offsetbehafteten Messsignalen berücksichtigt werden, wenn es um die Interpretation von Berechnungsergebnissen geht.

Literatur

[1] Völlmecke, Ingo: Digitale Integratoren und Ihre Eigenschaften, imc White Paper

Autor: Dipl. Ing. Ingo Völlmecke, imc

Weitere Informationen erhalten Sie unter:

imc Test & Measurement GmbH

Voltastr. 5
D-13355 Berlin

Telefon: +49 (0)30-46 7090-0
Fax: +49 (0)30-46 31 576
E-Mail: hotline@imc-tm.de
Internet: <http://www.imc-tm.de>

Die imc Test & Measurement GmbH ist Hersteller und Lösungsanbieter von produktiven Mess- und Prüfsystemen für Forschung, Entwicklung, Service und Fertigung. Darüber hinaus konzipiert und produziert imc schlüsselfertige Elektromotorenprüfstände. Passgenaue Sensor- und Telemetriesysteme ergänzen unser Produktportfolio.

Unsere Anwender kommen aus den Bereichen Fahrzeugtechnik, Maschinenbau, Bahn, Luftfahrt und Energie. Sie nutzen die imc-Messgeräte, Softwarelösungen und Prüfstände, um Prototypen zu validieren, Produkte zu optimieren, Prozesse zu überwachen und Erkenntnisse aus Messdaten zu gewinnen. Rund um die imc Geräte steht dafür ein

umfassendes Dienstleistungsspektrum zur Verfügung, das von der Beratung bis zur kompletten Prüfstandsautomatisierung reicht. Auf diese Weise verfolgen wir konsequent das imc Leistungsversprechen „produktiv messen“.

National wie international unterstützen wir unsere Kunden und Anwender mit einem starken Kompetenz- und Vertriebsnetzwerk.

Wenn Sie mehr über die imc Produkte und Dienstleistungen in Ihrem Land erfahren wollen oder selbst Distributor werden möchten, finden Sie auf unserer Webseite alle Informationen zum imc Partnernetzwerk:

<http://www.imc-tm.de/partner/>



Nutzungshinweis:

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte sind vorbehalten. Dieser Bericht darf ohne Genehmigung weder bearbeitet, abgewandelt noch in anderer Weise verändert werden. Ausdrücklich gestattet ist das Veröffentlichende und Vervielfältigen des Dokuments. Bei Veröffentlichung bitten wir darum, dass der Name des Autors, des Unternehmens und eine Verlinkung zur Homepage www.imc-tm.de genannt werden. Trotz inhaltlicher sorgfältiger Ausarbeitung, kann dieser Bericht Fehler enthalten. Sollten Ihnen unzutreffende Informationen auffallen, bitten wir um einen entsprechenden Hinweis an: marketing@imc-tm.de. Eine Haftung für die Richtigkeit der Informationen wird grundsätzlich ausgeschlossen.