Bestimmung der Unsicherheit von Messergebnissen bei mehreren Messgrößen

Whitepaper

Will man nach der Unsicherheit (früher Messfehler) eines Messergebnisses ermitteln, so hat man bei einkanaligen Messungen sowohl die Unsicherheit des Sensors als auch die Unsicherheit des Messkanals zu beachten. Noch komplizierter wird es, wenn das Messergebnis sich aus mehreren Messkanälen zusammensetzt. In diesem
White-Paper sollen die theoretischen Hintergründe erläutert werden und an Hand von Beispielen soll die praktische Vorgehensweise erläutert werden.

Fehlerdefinition, absoluter und relativer Fehler

Zuerst soll eine kleine Wiederholung der Fehlerdefinitionen erfolgen. Hierbei wird nur auf die systematischen Fehler eingegangen. Die Behandlung zufälliger Fehler wird hier nicht behandelt. Die systematischen Fehler sind dadurch gekennzeichnet, dass der Fehler einen bestimmten Betrag und ein bestimmtes Vorzeichen hat. Bei Kenntnis des Fehlers kann der Messwert korrigiert werden. Bezüglich der Fehlerarten ist zwischen dem absoluten Fehler und dem relativen Fehler zu unterscheiden.

Der (absolute) Fehler ist definiert zu: $\mathbf{X_F = X_A - X_W}$ (absoluter Fehler = Istanzeige - Sollanzeige) mit x_A = angezeigter Wert und x_W wahrer Wert oder Sollanzeige. Problematisch hierbei ist, dass der wahre Wert einer Größe üblicherweise nicht bekannt ist. Es gibt Fälle, bei denen der wahre Wert berechenbar ist. Ist dies nicht der Fall, so kann der wahre Wert häufig durch einen Wert, der mit einem hochgenauen, vertrauenswürdigen Gerät ermittelt wurde, ersetzt werden.

Ein Fehler von z.B. 1 V scheint recht viel zu sein. Eine Aussage kann aber erst dann gemacht werden, wenn bekannt ist, wie groß der Messwert selbst ist. Ist der Messwert 10V, so ist 1V relativ viel, ist der Messwert jedoch 1000V, so ist eine Fehler von 1V relativ wenig. Daher wird der relative Fehler definiert zu:

$$F_r = \frac{x_F}{x_W} = \frac{x_A - x_W}{x_W} \quad \text{rel. Fehler} = \frac{\text{Istanzeige} - \text{Sollanzeige}}{\text{Sollanzeige}}$$

Sind systematische Fehler nach Betrag und Vorzeichen bekannt, wird das unrichtige Ergebnis korrigiert.

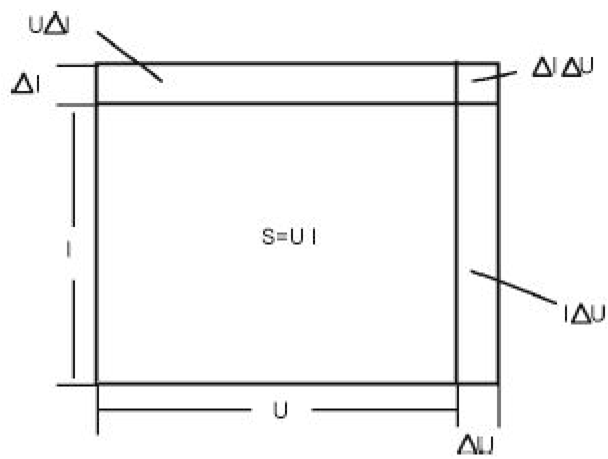
Fehlerfortpflanzung

Wird ein Messergebnis aus mehreren Messwerten gebildet, so gehen die einzelnen Fehler, mit denen die Messwerte behaftet sind, in das Messergebnis ein.

Fehlerabschätzung bei der Multiplikation von Messgrößen

Beispiel: Scheinleistungsmessung

Die Fehlerfortpflanzung soll zunächst am Beispiel der Scheinleistungsmessung, also anhand der Multiplikation von zwei Messgrößen, erläutert werden. Messgrößen sind die Spannung U und der Strom I, die mit Messinstrumenten der Klassen 0,5 (0,5% Fehler vom Messbereichsendwert) für den Spannungsmesser und 1,0 für den Strommesser gemessen wurden. Die Scheinleistung S berechnet sich bekanntlich zu S = U I.



Aus der Grafik ist zu entnehmen, dass die durch die Fehler ΔU und ΔI entstandene Fläche ΔS

$$\Delta S = U\,\Delta I + I\,\Delta U + \Delta I\,\Delta U$$

gilt. Bei hinreichend kleinen Fehlern kann ΔU ΔI gegen die

beiden übrigen Summanden vernachlässigt werden. Für den relativen Fehler ergibt sich nach Division durch S = U I

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{\Delta U}{U} + \frac{\Delta I}{I}$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass sich bei multiplikativer Verknüpfung der Messwerte die relativen Fehler addieren. Dies gilt generell für multiplikativ verknüpfte Messgrößen. Nun soll der relative Fehler mit Hilfe der garantieren Fehlergrenzen über die sogenannten Klassengenauigkeiten (Kl) ausgedruckt werden.

Seien U_E und I_E die Bereichsendwerte der Messkanale, so lassen sich die Fehler U und I durch

$$\Delta U = \frac{Kl_U U_E}{100} \quad \text{und} \quad \Delta I = \frac{Kl_I I_E}{100}$$

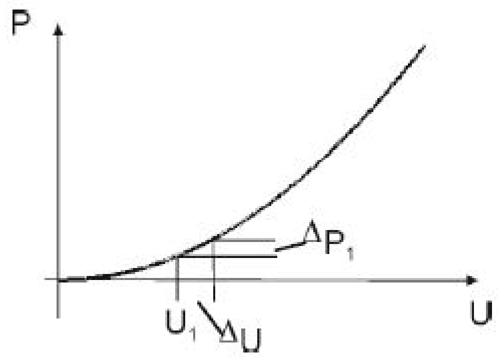
ausdrucken. Damit errechnet sich der relative Fehler der Scheinleistung zu

$$\frac{\Delta S}{S} = \frac{Kl_U}{100}\frac{U_E}{U} + \frac{Kl_I}{100}\frac{I_E}{I}$$

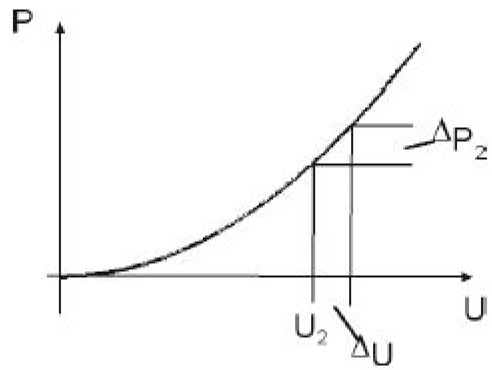
Aus diesem Ergebnis ist zu ersehen, dass der minimale Fehler der Addition der Klassenangaben (Addition der %-Werte) entspricht. Hierbei ist Voraussetzung, dass U = UE und I = IE ist. D.h. minimaler Fehler kann nur dann erreicht werden, wenn die Messkanale bei Vollaussteuerung arbeiten. Was also bei den „alten" klassischen Messgeraten gilt, ist auch bei modernen Messgeraten weiterhin gültig. Um minimale relative Fehler zu erhalten, sollte der Messkanal so weit wie möglich ausgesteuert werden. Bei den imc Messgeräten ist für viele Messkanäle eine Fehlergrenze von 0,1% vom Endwert definiert, was einer Klasse 0,1 entspricht. Zu beachten ist, dass bei Klassenangaben (z.B. 0,1) üblicherweise ein Fehler mit }0,1% vom Endwert gemeint ist.

Ein weiteres Beispiel soll den mathematischen Hintergrund weiter erläutern. Es soll an einem beliebig genau bekannten ohmschen Widerstand mit einem Wert von 1 Ω der Spannungsabfall ermittelt werden. Hieraus soll dann die Leistung berechnet werden. Die Leistung ist in diesem Fall $P=U^2/R$.

Die Spannung wurde im 20 V Bereich mit einem Fehler von 1% vom Bereich zu 12 V gemessen. Damit ergibt sich der mögliche Fehler zu $\Delta U=0{,}2$ V. Die Leistung ist daher $P=(12V)2/1\Omega=144$ W. Gefragt ist nach dem Fehler ΔP für die Leistung. Um diesen zu ermitteln, dient folgendes Bild, bei dem der Fehler ΔP der Leistung bei verschiedenen Spannungswerten U_1 und U_2 und gleichem Spannungsfehler ΔU ermittelt werden soll.



Messung der Spannung U_1 mit dem Fehler ΔU führt zum Fehler ΔP_1.



Messung der Spannung U_2 bei identischem ΔU zu einem wesentlich größeren Fehler ΔP_2.

Wie obiges Bild zeigt, führt ein und derselbe Fehler ΔU bei den Spannungen U_1 und U_2 zu vollkommen unterschiedlichen Leistungsfehlern ΔP_1 bzw. ΔP_2. Offensichtlich liegt die Größe des Fehlers der Leistung nicht nur an der Größe des Messfehlers ΔU, sondern auch an der Spannungshöhe selbst. Dahinter steckt der quadratische Zusammenhang zwischen der Messgröße U und der Ergebnisgröße P. Mit anderen Worten ist der Fehler der Leistung von der Steigung der Kurve am Messwert abhängig. Die Steigung lässt sich mathematisch durch:

$$\frac{dP}{dU} = \frac{2U}{R} \approx \frac{\Delta P}{\Delta U}$$

ausdrücken. Geht man von differentiell kleinen Größen dP und dU zu endlichen Größen ΔP und ΔU über, so kann der Wertzuwachs der Funktion P aus obiger Gleichung mit:

$$\Delta P = \frac{dP}{dU}\Delta U$$

berechnet werden. Im speziellen Fall ist der Fehler:

$$\Delta P = \frac{2U}{R}\Delta U$$

oder

$$\Delta P = \frac{2 \quad 12V}{1\Omega} 0{,}2V = 4{,}8W$$

Offensichtlich kann man den Wertzuwachs einer Funktion dadurch berechnen, dass man die Steigung mit der Änderung der Messvariable multipliziert.

Sind n Messgrößen $x_1, x_2, ..., x_n$ mit dem zu ermittelnden Ergebnis über:

$y = y(x_1,x_2,...,x_n)$
verknüpft und die systematischen Fehler $\Delta x_1, ..., \Delta x_n$ relativ klein, so kann man mit Hilfe des totalen Differentials den Fehler Δy bestimmt werden.

$$\Delta y = \frac{\partial y}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2}\Delta x_2 + \ldots + \frac{\partial y}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Sind also mehrere Messgrößen vorhanden, so sind die Steigungen:

$$\frac{\partial y}{\partial x}$$

bezüglich der einzelnen Messgrößen mit den Änderungen zu multiplizieren und die Einzelbeiträge der Messgrößen zu addieren. Die Symbole ∂ in obiger Gleichung bedeuten, dass eine sogenannte partielle Differentiation auszuführen ist. Die Technik der partiellen Differentiation ist dabei identisch mit der nach einer Variablen, jedoch werden die übrigen Variablen als konstante Größen betrachtet.

Das eingangs bereits erläuterte Beispiel der Scheinleistungsmessung wird also folgendermaßen berechnet:

S = U I = S(U,I)	S entspricht y
	U entspricht x_1
	I entspricht x_2

$$\Delta S = \frac{\partial S}{\partial U}\Delta U + \frac{\partial S}{\partial I}\Delta I$$

$$\Delta S = I\Delta U + U\Delta I$$

Dieses Ergebnis ist identisch mit dem vorher auf graphische Weise ermitteltem Ergebnis.

Sichere und wahrscheinliche Fehlergrenze

Entsprechend kann für die Gesamtfehlergrenze angegeben werden, falls G_1 bis G_n die Fehlergrenzen der einzelnen Messgrößen (entspricht ΔU und ΔI im obigen Beispiel) darstellen:

$$\pm G_{yS} = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial y}{\partial x_i} G_i \right|$$

G_{yS} ist die sichere Fehlergrenze.

Da es praktisch unwahrscheinlich ist, dass alle Fehler der einzelnen Geräte an der gleichen (positiven oder negativen) Fehlergrenze liegen, ist es unwahrscheinlich, dass die sichere Fehlergrenze in Anspruch genommen wird. Daher wird zusätzlich die wahrscheinliche Fehlergrenze G_{yW} definiert.

$$\pm G_{yW} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} G_i \right)^2}$$

Fehlerabschätzung bei komplexeren Formeln

Beispiel: Widerstandsbeiwertberechnung

Als abschließendes Beispiel soll der Widerstandsbeiwert c_W für ein Kraftfahrzeug ermittelt werden. Es werden im Luftkanal die Luftgeschwindigkeit v, die Luftdichte **p** und die Widerstandskraft F gemessen. Die Projektionsfläche A wird optisch ermittelt. Die Gleichung zur Berechnung der Widerstandskraft lautet:

$$F = \frac{\rho}{2} v^2 c_w A$$

Es ist der c_W-Wert und seine sichere Fehlergrenzen zu ermitteln. Der c_W-Wert kann bei den imc Messgeräten online mit dem Programm Online FAMOS aus den Messgrößen ermittelt werden. Zuerst ist aus obigem Funktionalzusammenhang des c_W-Wertes mit der Kraft F nach dem c_W-Wert aufzulösen. Das Ergebnis dieser Operation ist:

$$c_W = \frac{2F}{\rho v^2 A}$$

Damit lässt sich der maximale Fehler für den c_W-Wert mit dem totalen Differential zu

$$\pm \Delta c_W = \left| \frac{\partial c_W}{\partial F} \Delta F \right| + \left| \frac{\partial c_W}{\partial \rho} \Delta \rho \right| + \left| \frac{\partial c_W}{\partial v} \Delta v \right| + \left| \frac{\partial c_W}{\partial A} \Delta A \right|$$

ermitteln. Mit dem gegebenen Funktionalzusammenhang ergibt die Rechnung

$$\pm \Delta c_W = \left| \frac{2}{\rho v^2 A} \Delta F \right| + \left| \frac{-2F}{\rho^2 v^2 A} \Delta \rho \right| + \left| \frac{-4F}{\rho v^3 A} \Delta v \right| + \left| \frac{-2F}{\rho v^2 A^2} \Delta A \right|$$

Folgende Werte wurden gemessen: F = 200 N; **p** = 1,2 kg/m³; v = 150 m/s; A = 400 cm²

Die Berechnung des Nominalwertes für c_W ergibt unter Beachtung dass 1N=1kg m/s² ist

$$c_W = \frac{2F}{\rho v^2 A} = \frac{2 \; 200N}{1{,}2kg/m^3 (150m/s)^2 \, 400cm^2} = 0{,}3704$$

Die fehlenden maximalen Fehler ΔF, Δ **p** usw. für die gemessenen physikalischen Größen setzen sich aus den Fehlern der Sensoren und den Fehlern der Messkanäle zusammen. Am Beispiel der Kraftmessung soll die Ermittlung der Fehler weiter diskutiert werden. Der Kraftsensor selbst hat einen maximalen Fehler von 0,1% vom 250N-Messbereich und dieser ist am imc Messsystem CRONOS angeschlossen. Der beim Messkanal auftretende maximale Fehler im 250N-Messbereich (entspricht Vollaussteuerung des Messkanals) ist ebenfalls mit 0,1% vom Bereichsendwert angegeben.

Da Sensor und Messkanal multiplikativ verknüpft sind, addieren sich die relativen Fehler (siehe obiges Beispiel der Scheinleistungsbestimmung) und der maximale Kraftfehler ist 0,2% von 250 N also 0,5 N. Entsprechend wurde für die übrigen Größen maximale Fehler von Δ **p** =0,0025 kg/m³; Δv=0,4m/s; ΔA=0,05cm² ermittelt.

Die Fehlerrechnung ergibt die Therme

$$\pm \Delta c_W = \left|\frac{2}{\rho v^2 A}\Delta F\right| + \left|\frac{-2F}{\rho^2 v^2 A}\Delta\rho\right| + \left|\frac{-4F}{\rho v^3 A}\Delta v\right| + \left|\frac{-2F}{\rho v^2 A^2}\Delta A\right|$$

für den maximalen absoluten Fehler. Mit den angegebenen Werten ergibt sich der Fehler zu

$$\pm \Delta c_W = |0{,}0009259| + |0{,}0007716| + |0{,}0019753| + |0{,}0000463| = 0{,}003719$$

Teilt man den Fehler ± Δ c_W durch c_W, so erhält man für den maximalen relativen Fehler mit den gemessenen Werten

$$\pm \frac{\Delta c_W}{c_W} = \left|\frac{\Delta F}{F}\right| + \left|\frac{\Delta\rho}{\rho}\right| + \left|2\frac{\Delta v}{v}\right| + \left|\frac{\Delta A}{A}\right| = 0{,}01004 \text{ oder ca. } 1{,}0\%$$

Wahrscheinliche und sichere Fehlergrenze

Abschließend soll das Ergebnis diskutiert werden. Obwohl die Fehler der einzelnen Messkanäle jeweils einen relativen Fehler (bezogen auf den Bereich) von 0,1% oder besser aufweisen, ist das berechnete Messergebnis nicht besser als 1%. Dabei wurde vorausgesetzt, dass keine weiteren Fehler bei der Berechnung mit Online-FAMOS auftreten, was hier unterstellt werden darf. Der relative Geschwindigkeitsfehler geht durch den quadratischen Zusammenhang doppelt in den relativen Fehler ein. Eine weitere Erkenntnis sollte sein, dass die Messkanäle möglichst voll ausgesteuert sein sollten, damit die relativen Fehler klein bleiben. Der berechnete Fehler stellt eine sichere Fehlergrenze (Garantiefehlergrenze) dar. Wie oben angedeutet, kann auch die wahrscheinliche Fehlergrenze berechnet werden. In unserem Fall ergibt sich diese zu

$$\pm \sqrt{(0{,}0009259)^2 + (0{,}0007716)^2 + (0{,}0019753)^2 + (0{,}0000463)^2} = 0{,}00231$$

was einem relativen Fehler von 0,63% entspricht. Der Vorteil dieser Fehlerangabe ist, dass sie dem tatsächlichen Fehler wahrscheinlich wesentlich näher kommt als die mit 1% bestimmte sichere Fehlergrenze. Der Nachteil allerdings ist darin zu sehen, dass niemand sagen kann wie wahrscheinlich es ist, dass der Fehler nicht größer als 0,63% ist. Will man auf der sicheren Seite sein, so muss man die sichere Fehlergrenze berechnen.

Autor: Prof. Dr.-Ing. Klaus Metzger

Weitere Informationen erhalten Sie unter:

imc Test & Measurement GmbH

Voltastr. 5

D-13355 Berlin

Telefon: +49 (0)30-46 7090-0

Fax: +49 (0)30-46 31 576

E-Mail: hotline@imc-tm.de
Internet: http://www.imc-tm.de

Die imc Test & Measurement GmbH ist Hersteller und Lösungsanbieter von produktiven Mess- und Prüfsystemen für Forschung, Entwicklung, Service und Fertigung. Darüber hinaus konzipiert und produziert imc schlüsselfertige Elektromotorenprüfstände. Passgenaue Sensor- und Telemetriesysteme ergänzen unser Produktportfolio.

Unsere Anwender kommen aus den Bereichen Fahrzeugtechnik, Maschinenbau, Bahn, Luftfahrt und Energie. Sie nutzen die imc-Messgeräte, Softwarelösungen und Prüfstände, um Prototypen zu validieren, Produkte zu optimieren, Prozesse zu überwachen und Erkenntnisse aus Messdaten zu gewinnen. Rund um die imc Geräte steht dafür ein umfassendes Dienstleistungsspektrum zur Verfügung, das von der Beratung bis zur kompletten Prüfstandsautomatisierung reicht. Auf diese Weise verfolgen wir konsequent das imc Leistungsversprechen „produktiv messen“.

National wie international unterstützen wir unsere Kunden und Anwender mit einem starken Kompetenz- und Vertriebsnetzwerk.

Wenn Sie mehr über die imc Produkte und Dienstleistungen in Ihrem Land erfahren wollen oder selbst Distributor werden möchten, finden Sie auf unserer Webseite alle Informationen zum imc Partnernetzwerk:

http://www.imc-tm.de/partner/

Nutzungshinweis:
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Alle Rechte sind vorbehalten. Dieser Bericht darf ohne Genehmigung weder bearbeitet, abgewandelt noch in anderer Weise verändert werden. Ausdrücklich gestattet ist das Veröffentlichen und Vervielfältigen des Dokuments. Bei Veröffentlichung bitten wir darum, dass der Name des Autors, des Unternehmens und eine Verlinkung zur Homepage www.imc-tm.de genannt werden. Trotz inhaltlicher sorgfältiger Ausarbeitung, kann dieser Bericht Fehler enthalten. Sollten Ihnen unzutreffende Informationen auffallen, bitten wir um einen entsprechenden Hinweis an: marketing@imc-tm.de. Eine Haftung für die Richtigkeit der Informationen wird grundsätzlich ausgeschlossen.