Messunsicherheit von Messwertfolgen

Anwendungen in imc FAMOS

White Paper

Dieses Dokument beschreibt den Umgang mit der Messunsicherheit in Zusammenhang mit ganzen Datensätzen, also z.B. Zeitreihen oder anderen Folgen von Messwerten.
Dabei wird Bezug genommen auf den GUM (Abk. Guide to the expression of uncertainty in measurement) und darin speziell auf: JCGM 100:2008

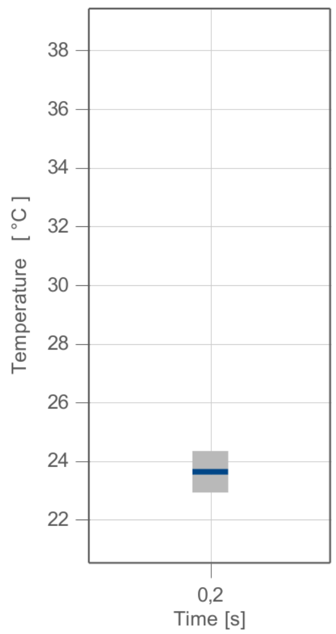
GUM und „Der Messwert“

Der GUM gilt. Aber er muss sinnvoll gedeutet und angewendet werden. Wenn im Folgenden von Messunsicherheit gesprochen wird, ist die Standardmessunsicherheit (standard measurement uncertainty) gemeint.

Der GUM behandelt die Messunsicherheit für den einen Messwert.

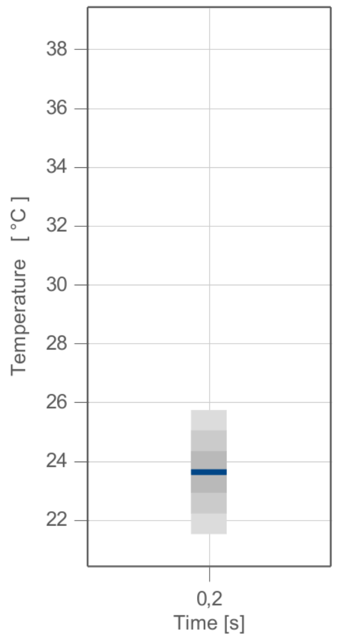
Beispiel: Die Temperatur des Öls in der Ölwanne soll bestimmt werden. Dazu werden ein Thermoelement und ein Messgerät eingesetzt. Der Messwert wird abgelesen: 23,8°C.

Das ist der eine Messwert. Der GUM beschreibt, wie nun die Messunsicherheit dieses Messwertes bestimmt wird. Dazu werden alle Einflussgrößen und Fehlerquellen gelistet und das Messunsicherheitsbudget ermittelt. Die Ungenauigkeit des Thermoelementes, der Einfluss der ungenauen Vergleichsstelle, das Verstärken und Digitalisieren spielen alle mit hinein. In diesem Beispiel möge die Messunsicherheit zu 0,7°C bestimmt worden sein.



In der Darstellung grau hinterlegt das Intervall: [Messwert – Messunsicherheit, Messwert + Messunsicherheit]

Es sei darauf hingewiesen, dass die Messunsicherheit die Standardabweichung darstellt. Bei zugrunde liegender Normalverteilung der Messwerte liegt nur in ca. 68% aller Messungen der wahre Wert im dargestellten Intervall. Die folgende Darstellung zeigt noch zusätzlich den Bereich der doppelten und dreifachen Standardabweichung, bei denen der Prozentsatz auf 95% bzw. 99,7% ansteigt.



Bei dem gesamten 6 Standardabweichungen (6 Sigma) umfassenden Intervall kann gesagt werden, dass mit ganz hoher Sicherheit der Messwert wirklich in diesem Intervall liegt.

Wiederholung der Messung zur Verbesserung des Messwertes

Nun wird der Messwert ein weiteres Mal abgelesen. Dieses Mal ergibt sich ein Wert von 24,0°C. Der GUM beschreibt, wie durch mehrfache Messung die Messunsicherheit verringert werden kann. Unter dem Stichwort „Type A evaluation“ ist das beschrieben. Die Messunsicherheit – folgend den Gesetzen der Standardabweichung – sinkt mit $\sqrt{N}$, wobei N die Anzahl der Wiederholungen ist.

$$\overline{u} = \frac{u}{\sqrt{N}}$$

Im Beispiel ergibt sich mit N=2 eine Messunsicherheit von 0,5°C. Der resultierende Messwert ist der arithmetische Mittelwert der Messwerte. Er ergibt sich zu 23,9°C.

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

Wichtig ist hierbei die Tatsache, dass unter denselben Messbedingungen gearbeitet wird. Wichtig ist aber auch, dass der wahre Wert der Temperatur sich nicht verändert hat.

Durchführung einer weiteren Bestimmung des Messwertes

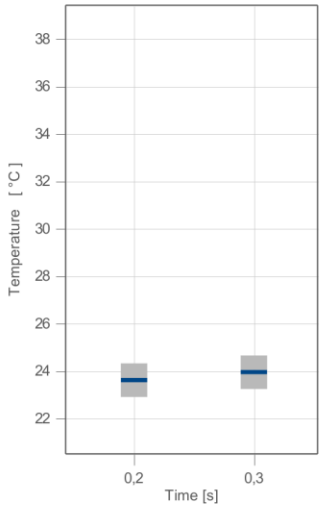
Auch diesmal wird der Messwert ein weiteres Mal abgelesen. Aber diesmal wird davon ausgegangen, dass der wahre Wert der Temperatur sich schon verändert haben kann. Die Absicht ist also nicht, den vorherigen Messwert zu verbessern, sondern zu diesem späteren Zeitpunkt einen ganz neuen Messwert abzulesen. Entsprechend GUM wird wieder eine Messung durchgeführt. Allerdings ist es eine andere, neue Messung. Konsequenterweise muss auch für diese Messung das Messunsicherheitsbudget ermittelt werden.
Dabei ergeben sich zwei Fälle, die im Folgenden einzeln behandelt werden: Das gleichbleibende und das nicht gleichbleibende Messunsicherheitsbudget.

Gleichbleibendes Messunsicherheitsbudget

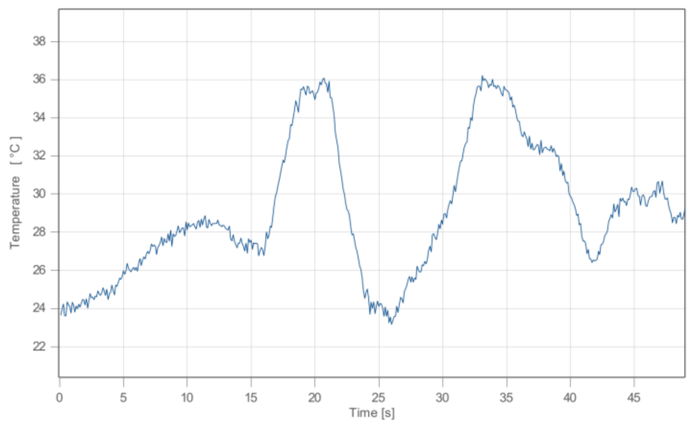
Hier wird angenommen, dass sich schon bei der Ermittlung des Messunsicherheitsbudgets zeigt, dass die Messunsicherheit weder von der Zeit noch indirekt von der Zeit abhängt. Unter dieser Maßgabe braucht das Messunsicherheitsbudget also nicht noch einmal ermittelt zu werden.
Ein Beispiel ist die oben aufgeführte Temperaturmessung. Die Messunsicherheit des benutzten Verstärkers und des Thermoelementes ändern sich nicht. Beide werden aus dem jeweiligen Datenblatt abgelesen und sind somit als konstant anzusehen.

Messung über der Zeit

Bei gleichbleibendem Messunsicherheitsbudget können nun komplette Datensätze erfasst werden. Für jeden einzelnen Messpunkt gilt die Messunsicherheit, damit auch für alle.

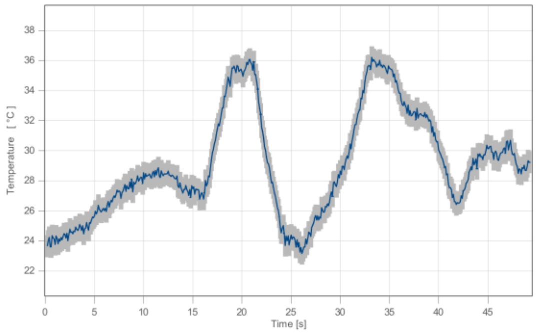


Erste Messung bei 0,2s, die nächste bei 0,3s. Der gesamte Datensatz sieht folgendermaßen aus:

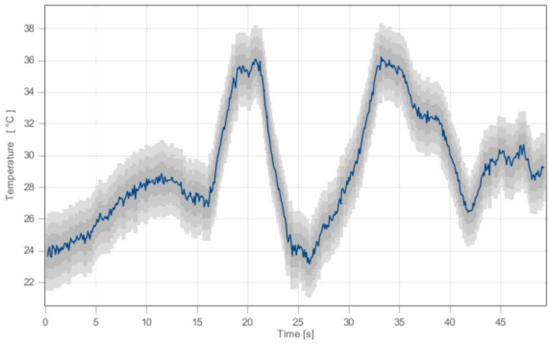


Hier kann also die gesamte Messung (= Datensatz) mit einem einzigen Wert für die Messunsicherheit charakterisiert werden.
Die Messunsicherheit wird als dunkelgrau hinterlegtes Band eingeblendet. Das Band hat überall die Höhe ±0.7°C, auch wenn es

an den steilen Stellen auf den ersten Blick nicht so scheint.



Auch hier werden noch die Bereiche der doppelten und dreifachen Standardabweichung heller unterlegt eingeblendet:



Ist die Messunsicherheit gleichbleibend, vereinfacht das auf den Datensätzen aufbauende weitere Verarbeitungen. So kann in imc FAMOS dem Messkanal eine feste Messunsicherheit zugeordnet werden, mit der dann bequem weiter gerechnet werden kann.

Nicht gleichbleibendes Messunsicherheitsbudget

Ergibt sich bei der neuen Messung für die Messunsicherheit ein anderer Wert, im obigen Beispiel anders als 0,7°C, so ist das der allgemeine Fall des GUM: Zu jeder Messung, sprich für jeden Messwert, muss das Messunsicherheitsbudget ermittelt werden.
Eine vereinfachte Behandlung ist nicht möglich. Typische Beispiele sind:

- Jeden Tag wird ein Messwert abgelesen. Entscheidende Einflussgrößen sind Umgebungstemperatur und Luftdruck, die eben jeden Tag deutlich anders sein können.
- Die Messunsicherheit hängt stark von der Größe des Messwertes selbst ab, z.B. Amplituden-proportional.

Beispiel Kraftmessung mit messwertabhängiger Messunsicherheit

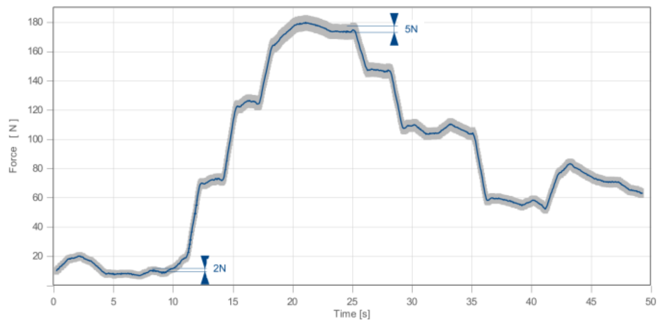
Im Folgenden wird das Beispiel einer Kraftmessung mit einem Verstärker diskutiert. Das Datenblatt des Verstärkers weist folgende Angaben auf:

Nullpunktabweichung typisch 1% vom Messbereich, maximal 2,5%
Verstärkungsunsicherheit typisch 1,5% vom Messwert, maximal 4%
Messbereich 200N

Die Werte werden so gedeutet, dass der durch Nullpunktabweichung entstehende Beitrag zur Messunsicherheit dem typischen Wert entspricht, als 2N. Ferner wird angenommen, dass der amplitudenproportionale Anteil auch dem typischen Wert entspricht, also 3N bei maximaler Aussteuerung. Mittels dieser Formel kann die kraftabhängige Messunsicherheit bestimmt werden:

Messunsicherheit (Kraft) = 2N + Kraft * 0,015

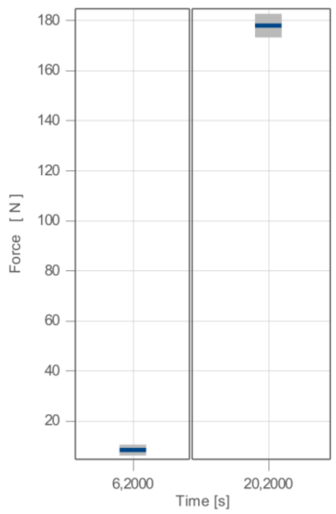
In der folgenden Abbildung ist der Verlauf der Kraft gezeigt:



In der Darstellung ist das Intervall [Messwert – Messunsicherheit, Messwert + Messunsicherheit] grau hinterlegt.

Bei kleinen Kräften (um 0N herum) ergibt sich eine Messunsicherheit von 2N. Bei großen Kräften (um 200N herum) ergibt sich eine Messunsicherheit von (2+3)N = 5N.
Die beiden Hüllkurven können mit folgenden imc FAMOS Befehlen generiert werden:

```
tol1 =
Force + 2 + Force * 0.015
tol2 =
Force - 2 - Force * 0.015
```



Es sei angemerkt, dass der Verstärker absichtlich schlechte technische Daten aufweist, damit die Grafiken anschaulich sind.
Moderne Verstärker wie etwa aus der imc CRONOSflex Reihe weisen weit mehr als 10mal so gute Werte auf.

Konsequenzen

Wenn das Ergebnis einer Messung oder auch Auswertung darzustellen ist, ist stets auch eine Angabe der Messunsicherheit erforderlich. Ist die Messunsicherheit ein (einziger) Zahlenwert, ist das bequem darzustellen, zu dokumentieren, vom Betrachter zu erfassen und zu deuten.
Eine Messunsicherheit, die sich nicht durch einen Zahlenwert ausdrücken lässt, ist weder bequem handzuhaben noch vom Betrachter bequem zu deuten oder einzuschätzen.

Daher wird häufig eine nicht gleichbleibende Messunsicherheit in eine gleichbleibende konvertiert.

Maximalwertbildung

Z.B. kann eine nicht gleichbleibende Messunsicherheit in eine gleichbleibende konvertiert werden, indem eine Maximalwertbildung vorgenommen wird.
Im vorangegangenen Beispiel der Kraftmessung also

[Konstante Messunsicherheit] = Maximum (Messunsicherheit (Kraft)) = 5N

Hier kommt das „Worst case“ Prinzip zur Anwendung: Bei Zweifel wird der größere bzw. schlechtere Wert genommen. Doch Achtung, eine konsequente Anwendung dieses Prinzips, ggf. über mehrere Auswertungsstufen hinweg, führt mitunter zu sehr hohen bis hin zu unglaubwürdigen Werten!
Im GUM ist das Prinzip der Maximalwertbildung nicht zu finden. Das gab es nur früher bei der klassischen Fehlerrechnung: Maximale Fehler wurden bestimmt und ihre Fortpflanzung berechnet. Der GUM setzt vielmehr auf besser reproduzierbare Größen wie die Standardabweichung. Zudem wird das Prinzip der gegenseitigen Auslöschung beachtet.

Allumfassende Messunsicherheit

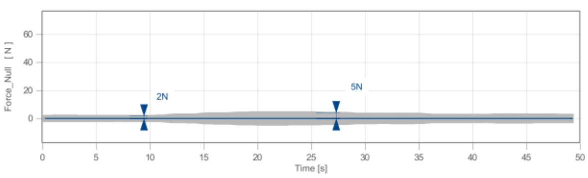
Bei der Reduktion einer komplexen Aussage auf einen Zahlenwert ist ein mittelnder Operator vorzuziehen. Der Maximalwertbildner berücksichtigt nur das Maximum, also einen einzigen Wert. Eine Standardabweichung, die über alle Werte des Datensatzes berechnet wird, ist zu bevorzugen. Das sei die allumfassende Standardabweichung, mit der die allumfassende Messunsicherheit definiert wird.
Die aus der deskriptiven Statistik bekannte Gleichung

$$s = \sqrt{\frac{1}{G-1}\left[\sum_{i=1}^{N}\left((n_i-1)s_i^2\right)+\sum_{i=1}^{N} n_i\,(\bar{x}_i-\bar{x})^2\right]}$$

mit

s	allumfassende Standardabweichung
N	Stichprobenanzahl = Anzahl der Messwerte
n_i	Umfang der Stichprobe
G	Gesamtanzahl, Summe aller ni
S_i	Standardabweichung der Stichprobe = Messunsicherheit jedes Messwertes
$\bar{x}_i$	Mittelwert der Stichprobe
$\bar{x}$	gesamter Mittelwert über alle G Werte

wird angewendet, indem die Mittelwerte alle für nicht relevant erklärt werden: Man stellt sich alle Messwerte auf null gezogen vor, was für die Betrachtung der Messunsicherheit keine Rolle spielt, also $\bar{x}i$ = 0 und $\bar{x}$ = 0. Mathematischer Hintergrund ist, dass die Subtraktion einer festen Zahl (hier des Messwertes) von einer Zufallsgröße deren Varianz bzw. Standardabweichung unverändert lässt.



Alle Messwerte auf null gezogen, Darstellung des Intervalls [±Messunsicherheit]

Da für die Standardabweichungen si der einzelnen Messwerte kein Stichprobenumfang bekannt ist, werden alle ni gleich und sehr groß angenommen. Damit wird G=N ·ni und nach Ausführung des Grenzüberganges ni → ∞ folgt:

$$s = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} s_i^2}$$

Die allumfassende Standardabweichung stellt sich dar als quadratischer Mittelwert aller einzelnen Standardabweichungen.
Damit ergibt sich für die allumfassende Messunsicherheit u

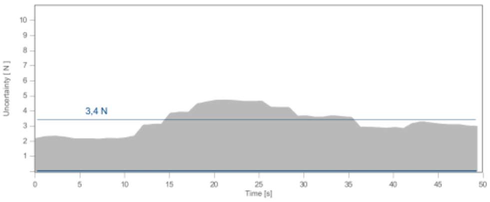
$$u = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_i^2}$$

mit u_i Messunsicherheit des Messwertes, N Anzahl der Messwerte

Im Beispiel der Kraftmessung ergibt sich:
u = 3,4N

Die Aussage der allumfassenden Messunsicherheit ist diese: Der Datensatz wird als Zufallsprozess verstanden. Die allumfassende Messunsicherheit beschreibt alle auftretenden Abweichungen gegen den jeweiligen wahren Wert in Form der Standardabweichung. Das gilt für beliebige Verteilungen, nicht nur die Normalverteilung.
Damit gilt auch folgende Aussage des GUM:
Die Messunsicherheit sagt, dass bei zugrunde gelegter Normalverteilung in 68% aller Messungen der wahre Wert im Intervall [±Messunsicherheit] um den Messwert liegt.
Ganz analog sagt auch die allumfassende Messunsicherheit, dass bei zugrunde gelegter Normalverteilung bei 68% aller Messwerte des Datensatzes der wahre Wert im Intervall [±Messunsicherheit] um den jeweiligen Messwert liegt. Die allumfassende Messunsicherheit ist auch nur eine Messunsicherheit, die eben den gesamten Datensatz charakterisiert.
Natürlich stimmt dieser allumfassende Wert für jeden einzelnen Messwert nicht oder nicht präzise. Wenn man nur noch die allumfassen-

de Messunsicherheit kennt, hat man das Wissen um die individuell unterschiedlichen Messunsicherheiten nicht. Nur wer das Wissen hat, kann z.B. Folgendes sagen: An den Stellen mit besonders niedriger individueller Messunsicherheit liegt der wahre Messwert nahezu sicher im viel breiteren Toleranzband der allumfassenden Messunsicherheit. An den Stellen mit besonders hoher individueller Messunsicherheit liegt der wahre Messwert nicht so wahrscheinlich (und wohl eher nicht) im dann vergleichsweise schmalen Toleranzband der allumfassenden Messunsicherheit.



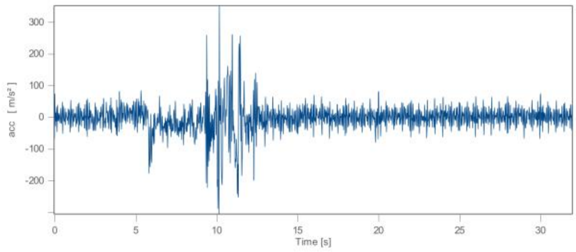
Dargestellt ist die detaillierte Darstellung der individuellen Messunsicherheit des Kraftverlaufs und eingeblendeter Linie der allumfassenden Messunsicherheit. Hier sei angemerkt, dass nicht 68% der Messwerte unterhalb der 3,4N Linie liegen. Das liegt daran, dass die einzelnen Messunsicherheiten (also die dicht aneinander gereihten grauen Balken) nicht normal verteilt sind.
Wichtig: Die allumfassende Messunsicherheit darf nur angewendet werden, wenn sich von der Anwendung her auch wirklich sinnvoll ein ganzer Datensatz mit einem Zahlenwert charakterisieren lässt.
imc FAMOS bietet diese allumfassende Messunsicherheit als Ergebnis der Fortpflanzung der Messunsicherheit durch einen mathematischen Algorithmus an. Es liegt beim Anwender, den Wert zu beachten.

Intervallbildung

In all den Fällen, in denen die Situation komplex ist, die Messunsicherheit gar nicht konstant, eine summarische Betrachtung zu grob ist, bleibt nur die Unterteilung des Datensatzes in Abschnitte. Für jeden Abschnitt ergibt sich dann eine eigene Betrachtung.

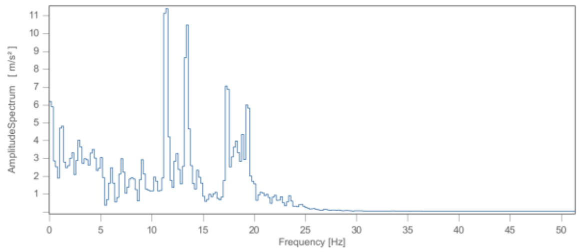
Komplexes Beispiel

Ein Beschleunigungs-Zeit-Verlauf „acc“ ist gegeben.



Das Amplitudenspektrum wird mit folgendem Befehl ermittelt:

```
AmplitudeSpectrum =
AmpSpectrumRMS_1( acc, 500, 2, 0, 1)
```



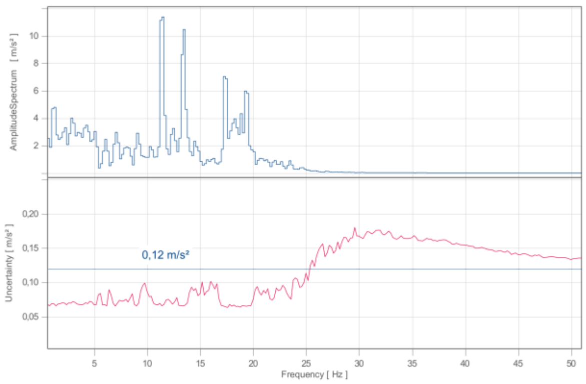
Bekannt ist die Messunsicherheit (0,5% des Messbereichs) des Signals „acc“ mit 3m/s². Die Messunsicherheit des Amplitudenspektrums wird von imc FAMOS ermittelt:

```
UncertaintySet( acc, "Uncertainty", 3)
UNCERTAINTY_LOOP 1000 1
      _acc = UncertaintyModify ( acc )
      AmplitudeSpectrum = AmpSpectrum-
      RMS_1( _acc, 500, 2, 0, 1)
      UncertaintyCalc ( AmplitudeSpec-
      trum )
End
uc = UncertaintyGet( AmplitudeSpec-
trum, "Uncertainty")
```

Aus der Berechnung ergibt sich uc = 0,12 m/s².
Der alternative Befehl

```
UncertaintyCalc ( AmplitudeSpectrum,
99, 0, "uc")
```

liefert detailliert Aufschluss über die Messunsicherheit jeder einzelnen Spektrallinie, also jedes einzelnen Messpunktes des Ergebnisdatensatzes.



Der detaillierte Verlauf der Messunsicherheit über der Frequenz zeigt, dass die Messunsicherheit längst nicht konstant ist. Die Anwendung entscheidet, ob die allumfassende Messunsicherheit von 0,12 m/s² benutzt werden darf. Ist z.B. nur die größte Spektrallinie von Interesse, dann kann sicher für sie eine Messunsicherheit von 0,07 m/s² angegeben werden. Dann aber wäre es perfekt, wenn der mathematische Algorithmus gleich diese Linie extrahiert und genau für sie die Messunsicherheit ermittelt.

Immerhin ist es gut zu wissen, ob es im Ergebnis Bereiche mit auffällig hoher Messunsicherheit gibt. Eine detaillierte Analyse der individuellen Messunsicherheit ist deshalb stets empfohlen. Im Fall der durchgeführten Spektralanalyse ist gerade in dem eigentlich nicht interessierenden rechten Teil des Spektrums die Messunsicherheit hoch. Wenn dieser Teil weggeschnitten wird, wird im verbleibenden linken Teil auch die allumfassende Messunsicherheit deutlich kleiner. Nach Ergänzung im Algorithmus von

```
AmplitudeSpectrum = gren ( AmplitudeSpectrum, 0, 25 )
```

folgt uc = 0,08 m/s². Das kann nun als äußerst repräsentativ für das Ergebnis angesehen werden.

Fazit

Das Detailwissen um die Messunsicherheit der einzelnen Messpunkte ist wichtig, um die Zusammenfassung zu einer allumfassenden Messunsicherheit zu rechtfertigen.

Weitere Informationen erhalten Sie unter:

imc Test & Measurement GmbH

Voltastr. 5

D-13355 Berlin

Telefon: +49 (0)30-46 7090-0

Fax: +49 (0)30-46 31 576

E-Mail: hotline@imc-tm.de

Internet: http://www.imc-tm.de

Die imc Test & Measurement GmbH ist Hersteller und Lösungsanbieter von produktiven Mess- und Prüfsystemen für Forschung, Entwicklung, Service und Fertigung. Darüber hinaus konzipiert und produziert imc schlüsselfertige Elektromotorenprüfstände. Passgenaue Sensor- und Telemetriesysteme ergänzen unser Produktportfolio.

Unsere Anwender kommen aus den Bereichen Fahrzeugtechnik, Maschinenbau, Bahn, Luftfahrt und Energie. Sie nutzen die imc-Messgeräte, Softwarelösungen und Prüfstände, um Prototypen zu validieren, Produkte zu optimieren, Prozesse zu überwachen und Erkenntnisse aus Messdaten zu gewinnen. Rund um die imc Geräte steht dafür ein umfassendes Dienstleistungsspektrum zur Verfügung, das von der Beratung bis zur kompletten Prüfstandsautomatisierung reicht. Auf diese Weise verfolgen wir konsequent das imc Leistungsversprechen „produktiv messen".

National wie international unterstützen wir unsere Kunden und Anwender mit einem starken Kompetenz- und Vertriebsnetzwerk.

Wenn Sie mehr über die imc Produkte und Dienstleistungen in Ihrem Land erfahren wollen oder selbst Distributor werden möchten, finden Sie auf unserer Webseite alle Informationen zum imc Partnernetzwerk:

http://www.imc-tm.de/partner/